

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA DE SÃO CARLOS**

**Levy Bruno do Nascimento Batista**

**Geometria de um q-bit**

**São Carlos**

**2023**



**Levy Bruno do Nascimento Batista**

## **Geometria de um q-bit**

Trabalho de conclusão de curso apresentado  
ao Programa de Graduação em Física  
do Instituto de Física de São Carlos da  
Universidade de São Paulo, para obtenção  
do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Diogo de Oliveira Soares  
Pinto

**São Carlos**  
**2023**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO PARA FINS DE ESTUDO E  
PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

S856m	Batista, Levy Bruno do Nascimento Geometria de um q-bit / Levy Bruno do Nascimento Batista ; orientador Diogo de Oliveira Soares Pinto- São Carlos, 2023. 25 p.
Trabalho de conclusão de curso – Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2023.	
1. Qubit. 2. Transformação Unitária. 3. Esfera de Bloch. 4. Rotações. 5. Projeção Estereográfica. 6. Métrica. I. Soares- Pinto, Diogo, orient.. II. Título.	

## **RESUMO**

BATISTA, L. B. N. **Geometria de um q-bit.** 2023. 25p. Trabalho de conclusão de curso - Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

Um q-bit pode ser entendido como um sistema quântico de dois níveis, cuja representação tradicional é um vetor de estado no espaço de Hilbert, e operações reversíveis sobre q-bits são implementadas a partir de transformações unitárias. Neste trabalho, o objetivo é estudar essas operações sob um ponto de vista geométrico, aplicando ferramentas conhecidas da geometria riemanniana para o entendimento de sistemas quânticos. Dada a representação na esfera de Bloch, as operações unitárias sobre q-bits aparecem agora como rotações que ligam um estado a outro de forma que, com a introdução de uma métrica adequada, é possível estudar um problema fundamental da análise de complexidade computacional: a relação entre o menor caminho entre dois estados com a dificuldade de implementar a operação unitária associada a essa transformação. Veremos que a esfera de Bloch é deformada conforme variamos os parâmetros da métrica definida, tornando algumas rotações mais favoráveis em detrimento de outras. Por fim, citaremos alguns pontos nos quais a análise de sistemas de um único q-bit, embora rica e desafiadora, deixa a desejar quando comparada com a de sistemas de múltiplos q-bits.

**Palavras-chave:** q-bit. Transformação unitária. Esfera de Bloch. Rotações. Métrica.



## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	7
2	ASPECTOS GEOMÉTRICOS DO Q-BIT . . . . .	9
3	GEOMETRIA E COMPLEXIDADE . . . . .	13
3.1	Conjunto universal de portas e o problema da complexidade . . . . .	13
3.2	Complexidade unitária . . . . .	15
3.3	Complexidade de estado . . . . .	17
3.4	Sistemas de múltiplos q-bits . . . . .	21
4	CONCLUSÃO . . . . .	23
	REFERÊNCIAS . . . . .	25



## 1 INTRODUÇÃO

Inspirado na Ref. (1), é possível definir um q-bit como um objeto matemático, mais especificamente um vetor, que faz parte de um espaço vetorial complexo de dimensão 2, o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  2D. Como esse espaço tem  $d = \dim(\mathcal{H}) = 2$ , define-se uma base ortonormal  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , a chamada base computacional – uma referência aos bits da computação clássica: 0 e 1 –, tal que qualquer elemento  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle, \quad (1.1)$$

com  $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$  e  $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$ , representando a normalização de  $|\psi\rangle$ . Outra representação bastante comum na literatura para  $|\psi\rangle$  é a de vetor coluna

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

tal que  $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Esse tipo de representação é mais útil para boa parte dos propósitos operacionais presentes nesse trabalho, sobretudo no tratamento de rotações. Outra base ortonormal comumente utilizada é a base de Hadamard (2)  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , de forma que  $|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$  e  $|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ . Essa base recebe esse nome devido às relações:  $|+\rangle = H|0\rangle$  e  $|-\rangle = H|1\rangle$ , donde  $H$  é a transformação implementada pela chamada porta Hadamard. Mais sobre portas quânticas e as transformações realizadas por elas será visto na seção seguinte.

Fisicamente, esses vetores representam estados quânticos de dois níveis em que  $P(|0\rangle, |\psi\rangle) = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = |a_0|^2$  e  $P(|1\rangle, |\psi\rangle) = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = |a_1|^2$ . Isso representa uma justificativa para a condição de normalização, uma vez que a soma das probabilidades descritas deve ser igual a 1. A vantagem de apresentar uma primeira definição de q-bits de uma maneira mais abstrata, apenas como objetos matemáticos, é de poder construir uma teoria que não depende de um sistema físico em específico.

A notação de vetor de estado, embora satisfatória, só permite descrever os chamados estados puros; para uma descrição mais geral, que pode ser usada tanto para estados puros quanto para estados mistos – sistemas físicos no qual há uma mistura estatística de estados quânticos, também chamada de ensemble de estados puros –, utiliza-se o operador densidade  $\rho$ , com o termo “operador” estando associado ao fato de que  $\rho$  é um elemento do espaço de operadores lineares. Uma relação direta entre ambas as representações é dada por  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , para estados puros, e  $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ , com  $p_i$  sendo a probabilidade de ocorrência de um dado estado  $|\psi_i\rangle$ , para estados mistos. Esses operadores, que são hermitianos, positivos semi-definidos e tem  $\text{Tr}(\rho) = 1$ , donde  $\text{Tr}$  denota o traço de uma

matriz, podem ser representados por matrizes complexas  $2 \times 2$  para o caso de um único q-bit. Além disso, para o conjunto de operadores densidade representando estados mistos, tem-se a condição adicional de que  $\text{Tr}(\rho^2) < 1$  – o valor mínimo é  $\text{Tr}(\rho^2) = \frac{1}{2}$ , que corresponde ao estado de máxima mistura estatística tal que  $\rho = \frac{\mathbb{I}}{2}$  –, enquanto para os puros essa condição é dada por  $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ .

A descrição de estados quânticos por meio do operador densidade tem uma importante interpretação geométrica, que pode ser melhor visualizada com a definição da esfera de Bloch.

Além disso, operadores lineares também podem ser utilizados para representar processos físicos sobre um sistema quântico. Entretanto, essa definição ainda é muito geral para os propósitos desse trabalho; destaca-se que, para sistemas físicos fechados, isto é, o sistema em que conhecemos todos os graus de liberdade, temos que o estado  $|\psi'\rangle = a'_0 |0\rangle + a'_1 |1\rangle$  resultante da operação  $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$ , em que  $U$  é um operador linear que atua em um espaço de dimensão finita, logo tem uma representação matricial, obedece a condição de normalização. Com isso, assegura-se que  $U$  é um operador unitário  $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$ . Dessa definição, destaca-se ainda uma importante característica de processos físicos descritos por operadores unitários: a reversibilidade. Como  $U$  é inversível, o processo inverso pode sempre ser descrito pelo operador  $U^{-1} = U^\dagger$ . Logo, nesse trabalho, operações sobre um único q-bit sempre serão representadas por operadores unitários.

Ainda na analogia com a computação clássica, da mesma forma que o processamento de bits pode ser representado a partir de um modelo de circuitos lógicos, no qual cada fio representa um bit e cada porta lógica é representada de acordo com uma simbologia adequada, o processamento de q-bits pode ser representado por meio de um modelo semelhante, no qual as portas lógicas passam a ser chamadas de portas quânticas.

Alguns exemplos de portas que agem em apenas um q-bit são as representadas pelas matrizes de Pauli  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  e  $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Nota-se que elas não são apenas unitárias ( $\sigma_i \sigma_i^\dagger = \mathbb{I}$ ), como também são hermitianas ( $\sigma_i = \sigma_i^\dagger$ ). Essas matrizes tem grande importância sob um ponto de vista teórico em geral: da Álgebra Linear temos que todo operador hermitiano que atua num espaço de dimensão 2 possui 4 parâmetros reais e pode ser expandido na base  $\{\mathbb{I}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  de matrizes de Pauli. Há ainda outras portas relevantes, como a Hadamard  $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)$ , a porta  $S = (|0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 1|)$  e a porta  $T = (|0\rangle\langle 0| + e^{i\pi/4}|1\rangle\langle 1|)$ , que são de fundamental importância na definição de um conjunto universal de portas, o que será feito mais adiante.

## 2 ASPECTOS GEOMÉTRICOS DO Q-BIT

De início, resgata-se a associação entre o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  definido anteriormente e o espaço  $\mathbb{C}^2$ . Da Eq. (1.1), como  $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ , é natural pensar que cada estado corresponde univocamente a um ponto de  $\mathbb{C}^2$ . Entretanto há uma consideração física importante que impede isso: Dois estados quânticos que diferem apenas de uma fase global, como  $|\psi\rangle$  e  $e^{i\theta}|\psi\rangle$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , representam o mesmo sistema físico (1). Isso motiva a definição de uma classe de equivalência, desconsiderando, por ora, a condição de normalização

$$|\psi\rangle \sim |\psi'\rangle \iff |\psi'\rangle = c|\psi\rangle, \quad (2.1)$$

com  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Dessa forma, são as retas que passam pela origem em  $\mathbb{C}^2$  que estão associadas aos estados quânticos de maneira tal que o conjunto dessas retas definidas na Eq. (2.1) formam o espaço projetivo complexo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  (3). Por outro lado, esse espaço é isomorfo à chamada esfera de Riemann (4), que por sua vez está relacionada com a esfera de raio unitário  $\mathbb{S}^2$ . Assim, deduz-se que todos os estados puros de um único q-bit podem ser representados como pontos da superfície de uma esfera de raio 1 em  $\mathbb{R}^3$ .

Isso pode ser melhor visualizado a partir de uma parametrização conveniente, tendo em vista a condição de normalização

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle, \quad (2.2)$$

em que  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\phi \in [0, 2\pi]$ . A associação com o sistema de coordenadas esféricas é imediata: Cada estado  $|\psi\rangle$  representado pela Eq. (2.2) corresponde a apenas um único par  $(\theta, \phi)$ , com exceção dos estados  $|0\rangle$ , que se encontra no pólo norte, e  $|1\rangle$ , que se encontra no pólo sul. Ambos tem valor de  $\theta$  bem definido – 0 e  $\pi$ , respectivamente –, mas não um de  $\phi$ . A essa esfera dá-se o nome de esfera de Bloch.

Por outro lado, com o formalismo de operador densidade, deixa ainda mais claro o caráter geométrico intrínseco à definição de um q-bit. Nesse sentido, para um estado puro parametrizado, a relação entre o operador densidade  $\rho$  que descreve esse sistema e o respectivo vetor de estado  $|\psi\rangle$  é

$$\begin{aligned} \rho = |\psi\rangle\langle\psi| &= \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos(\theta) & e^{-i\phi}\sin(\theta) \\ e^{i\phi}\sin(\theta) & 1 - \cos(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

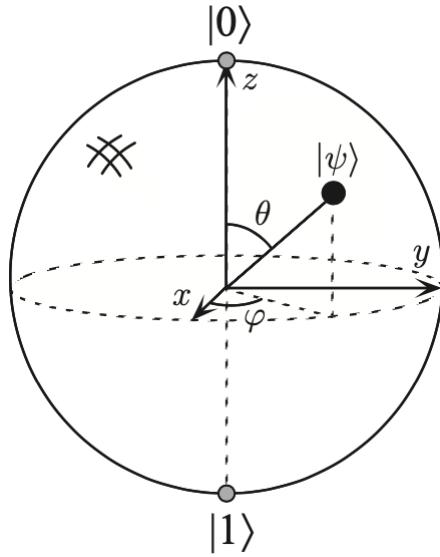


Figura 1 – Representação gráfica de uma esfera de Bloch.

Fonte: NIELSEN; CHUANG. (1)

Além disso, a relação entre as coordenadas cartesianas ( $x, y, z$ ) e as coordenadas esféricas ( $\theta, \phi$ ) de um ponto na superfície da esfera de Bloch é

$$\begin{cases} x = \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y = \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z = \cos(\theta) \end{cases} \quad (2.4)$$

assim, a Eq. (2.3) pode ser reescrita como

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+z & x-iy \\ x+iy & 1-z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z), \quad (2.5)$$

ou de maneira mais compacta,

$$\rho = \frac{\mathbb{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2}, \quad (2.6)$$

em que  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  e  $\vec{\sigma} = \sigma_x\hat{i} + \sigma_y\hat{j} + \sigma_z\hat{k}$  sendo um vetor formado pelas matrizes de Pauli (2). É interessante destacar ainda um critério de identificação da natureza do estado dado o seu operador densidade. Dada a Eq. (2.5), tem-se

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho^2) &= \frac{(1+z)^2 + (x-iy)(x+iy) + (1-z)^2 + (x+iy)(x-iy)}{4} \\ &= \frac{1 + |\vec{r}|^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nessa representação, fica clara a correspondência um para um existente entre operadores densidade (estados quânticos) e vetores  $\vec{r}$  que ligam do centro da esfera a um ponto da sua superfície, uma vez que  $\text{Tr}(\rho^2) = 1 \implies |\vec{r}| = 1$ . Analogamente, os pontos internos à esfera de Bloch, ou seja,  $|\vec{r}| < 1$ , também tem significado físico, uma vez que

eles representam estados mistos, sendo o centro a representação do estado de máxima mistura estatística. Além disso, pontua-se que transformações unitárias não podem alterar a pureza – o valor de  $|\vec{r}|$  – de um estado.

Com efeito, é válido mostrar como as transformações unitárias representam rotações na esfera de Bloch. Nesse sentido, o operador de rotação pode ser definido como

$$R_{\hat{n}}(\theta) = e^{-i\theta(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})/2}, \quad (2.8)$$

de forma que  $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$  é um vetor unitário em relação ao qual a rotação é tomada e  $\theta$  é o ângulo rotacionado (5). Assim, tem-se  $(\hat{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = \mathbb{I}$ , o que permite reescrever a Eq. (2.8) de uma maneira mais interessante sob o ponto de vista operacional

$$R_{\hat{n}}(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbb{I} - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(\hat{n} \cdot \vec{\sigma}). \quad (2.9)$$

Um exemplo em que é direta a interpretação do operador de rotações agindo sobre um q-bit é quando toma-se  $\hat{n} = \hat{k} = (0, 0, 1)$ , de maneira que

$$R_{\hat{k}}(\alpha) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\mathbb{I} - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sigma_z = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}.$$

Dessa forma

$$|\psi'\rangle = R_{\hat{k}}(\alpha)|\psi\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = e^{-i\alpha/2} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i(\phi+\alpha)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

e como fases globais não tem significado físico, nota-se que, de fato, o vetor  $|\psi'\rangle$  é igual ao vetor  $|\psi\rangle$  rotacionado de um ângulo  $\alpha$  em torno do eixo  $z$ . Por fim, veja que toda matriz  $2 \times 2$  unitária  $U$  pode ser escrita na forma

$$U = \begin{pmatrix} e^{i(\alpha-\beta/2-\delta/2)} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) & -e^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ e^{i(\alpha+\beta/2-\delta/2)} \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & e^{i(\alpha+\beta/2+\delta/2)} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix},$$

em que  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . Essa relação pode ser reescrita em termos dos operadores de rotação:  $U = e^{i\alpha} R_{\hat{k}}(\beta) R_{\hat{j}}(\gamma) R_{\hat{k}}(\delta)$ , sendo essa representação conhecida por, a menos de uma fase global, como parametrização em termos dos ângulos de Euler. Fisicamente, entretanto, não há nenhuma justificativa para se privilegiar os eixos  $y$  e  $z$ , de forma que é possível escrever esse resultado de uma maneira mais geral

$$U = e^{i\alpha} R_{\hat{m}}(\beta) R_{\hat{l}}(\gamma) R_{\hat{m}}(\delta), \quad (2.11)$$

em que  $\hat{l}$  e  $\hat{m}$  são vetores unitários não paralelos. Isso evidencia como as transformações unitárias, que representam portas quânticas de um q-bit, estão diretamente relacionadas a rotações.



### 3 GEOMETRIA E COMPLEXIDADE

#### 3.1 Conjunto universal de portas e o problema da complexidade

Agora, o interesse é voltado para estudar a dificuldade de implementação de diferentes transformações unitárias utilizando ferramentas oriundas da geometria diferencial. Primeiramente, é necessário apresentar o modelo mais conhecido para quantificar essa dificuldade e, para isso, introduz-se a noção de conjunto universal de portas. É demonstrável (1) que todas as portas de um q-bit e a porta CNOT – operação unitária  $CNOT = (|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x)$  – constituem um conjunto universal, no sentido de que todas as unitárias  $U$  que atuam em  $n$  q-bits podem ser implementadas a partir de portas desse conjunto. Entretanto, esse resultado não representa um ganho prático, uma vez que boa parte desse conjunto não pode ser realizado de uma maneira resistente a erros (1).

A solução é encontrar um subconjunto discreto em que isso possa ser superado, mesmo que, em contrapartida, não seja mais possível reproduzir qualquer transformação  $U$  com exatidão, já que elas fazem parte de um conjunto contínuo. Com efeito, o melhor que se pode fazer agora é aproximar  $U$  com o operador  $V$ , e assim introduz-se a definição do erro  $E(U, V)$  entre esses dois operadores como

$$E(U, V) = \max_{|\psi\rangle} \|(U - V)|\psi\rangle\|, \quad (3.1)$$

de forma que  $\||\phi\rangle\| = \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle}$  denota a norma de  $|\phi\rangle$  e  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ . De forma geral, quando é dito que um circuito quântico realiza uma operação  $V$  que aproxima  $U$  com tolerância  $\epsilon > 0$ , significa que  $E(U, V) < \epsilon$  (2).

Com isso, apresenta-se o mais conhecido conjunto universal de portas, composto por  $\{CNOT, H, T, S\}$ . É comum na literatura desconsiderar a porta  $S$ , uma vez que ela pode ser construída a partir da porta  $T$  usando que  $S = T^2$  – a definição dessas últimas três portas foi dada no final do Capítulo 1. Esse conjunto de forma alguma é único, mas acaba sendo de grande interesse pela demonstração da sua universalidade. No caso de interesse desse trabalho, isto é, de sistemas compostos apenas por um único q-bit, o conjunto universal se resume à  $\{H, T\}$ , assim a universalidade desse conjunto segue do fato de que a porta  $T$  representa uma rotação de  $\frac{\pi}{4}$  na esfera de Bloch em torno do eixo  $z$ , a menos de uma fase global, enquanto  $HTH$  representa uma rotação de  $\frac{\pi}{4}$  em torno do eixo  $x$ . Dessa forma, a composição dessas duas transformações

$$THTH = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\mathbb{I} - i \left[ \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)(\sigma_x + \sigma_z) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\sigma_y \right] \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

resulta em uma rotação de  $\theta$ , tal que  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$ , em torno de um eixo  $\vec{m} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ .

O fato de que  $\frac{\theta}{\pi}$  é um número irracional garante que existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $R_{\hat{m}}^k(\theta)$  aproxima  $R_{\hat{m}}(\alpha)$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi]$ , com uma tolerância arbitrariamente pequena, isto é,  $E(R_{\hat{m}}(\alpha), R_{\hat{m}}^k(\theta)) < \delta$ , sendo  $\delta > 0$  (1). Para demonstrar isso, sejam  $N$  um inteiro maior que  $2\pi/\delta$  e  $\theta_r \in [0, 2\pi] \mid \theta_r = (r\theta) \text{ mod } 2\pi$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ , então, pelo princípio das casas de pombos, existem  $r$  e  $s$  inteiros no intervalo  $[1, N]$  tal que  $|\theta_r - \theta_s| \leq 2\pi/N < \delta$ . Assumindo, sem perca de generalidade, que  $r > s$  e como  $\frac{\theta}{\pi}$  é irracional, tem-se  $|\theta_{r-s}| < \delta$ , com  $\theta_{r-s} \neq 0$ . Assim, é garantido que  $\theta_{q(r-s)}$  cobre todo o intervalo  $[0, 2\pi]$  conforme  $q$  varia,  $q \in \mathbb{Z}$ , com a máxima distância entre dois termos sucessivos dessa sequência sendo  $\delta$ . Por fim, como  $HR_{\hat{m}}(\theta)H = R_{\hat{l}}(\theta)$ , com  $\hat{l}$  e  $\hat{m}$  não paralelos, e a relação dada na Eq. (2.11) assegura que, a menos de uma fase global, qualquer transformação  $U$  pode ser escrita como produto de rotações em relação a eixos não paralelos, segue de  $E(U_n \dots U_1, V_n \dots V_1) \leq \sum_{i=1}^n E(U_i, V_i)$  que

$$E(U, R_{\hat{m}}^{k_1}(\theta)HR_{\hat{m}}^{k_2}(\theta)HR_{\hat{m}}^{k_3}(\theta)) < \epsilon, \quad (3.2)$$

com  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$  e fazendo  $\epsilon = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ . Assim, a Eq. (3.2) demonstra a universalidade do conjunto  $\{H, T\}$ , uma vez que, por construção, os operadores  $R_{\hat{m}}(\theta)$  só dependem de seus elementos (1).

Nesse formalismo, a ideia de complexidade está intimamente relacionada com a menor quantidade de portas do conjunto universal necessária para aproximar uma dada transformação  $U$  com tolerância  $\epsilon$ . No entanto, essa definição carrega consigo alguns problemas (6):

- A escolha do conjunto universal de portas é arbitrária e diferentes conjuntos podem resultar em complexidades distintas para uma mesma transformação.
- A escolha de um determinado valor para a tolerância  $\epsilon$  também é arbitrária e a complexidade resultante é extremamente sensível ao valor de  $\epsilon$ .
- A definição apresentada de complexidade é descontínua no sentido de que dois estados podem estar arbitrariamente próximos na noção de distância induzida pelo produto interno mas serem exponencialmente distantes em complexidade.

Deixando um pouco mais clara a noção de distância induzida pelo produto interno: No espaço de Hilbert, é assumido que dois estados se aproximam conforme o produto interno entre eles cresce. Nesse sentido, dois estados ortogonais estão o mais distante possível um do outro nesse espaço. É no espírito desses três pontos em que se constrói uma abordagem alternativa para o cálculo de complexidade computacional, sendo a proposta uma tentativa de explicitar matematicamente o fato de que algumas transformações são de fácil execução mesmo que os estados que ela relaciona estejam maximamente separados, além de introduzir uma forma contínua de se contabilizar complexidade (6).

Há duas maneiras de se fazer isso e também há uma forma de relacioná-las; a primeira maneira, introduzida na Ref. (7), denominada de complexidade unitária, diz respeito a calcular o comprimento de geodésicas – curvas que minimizam localmente a distância entre dois pontos segundo a métrica do espaço – entre  $\mathbb{I}$  e a unitária  $U$  que se deseja implementar na variedade diferenciável associada ao  $SU(2)$ . Destaca-se que o grupo  $SU(2)$  é composto pelas matrizes unitárias  $2 \times 2$  que possuem  $\det U = 1$ , assim todo o tratamento dado a transformações unitárias ao longo desse trabalho continua válido para os elementos desse grupo. Além disso, como o  $SU(2)$  é um exemplo de grupo de Lie, é possível associar uma variedade diferenciável a ele e assim os elementos do grupo passam a ser vistos como pontos dessa variedade, de forma que é possível construir a noção de espaço tangente localmente euclidiano (8), fundamental para a nova definição de distância de complexidade. Essa nova definição se baseia na métrica associada ao produto interno natural desse espaço  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$ ,  $A, B \in SU(2)$ , inserindo um fator de penalidade que representa o fato de que nem todas as direções do espaço tangente tem o mesmo grau de dificuldade de serem percorridas.

Já a segunda maneira, denominada complexidade de estado, está associada à situação em que, dado dois estados, o quanto difícil é obter um deles partindo do outro (6). Analogamente, isso pode ser feito introduzindo uma métrica alternativa àquela relacionada ao produto interno no espaço de Hilbert, o que permite calcular a distância de complexidade de estado. A relação entre essas duas formas de quantificar complexidade segue do fato de que a conexão entre dois estados  $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$  se dá pela ação de um elemento do subconjunto de  $SU(2)$  de todos os operadores  $U$  que satisfazem  $|\psi\rangle = U|\phi\rangle$ , logo define-se que a complexidade de estado é igual a menor complexidade unitária de um elemento desse subconjunto.

### 3.2 Complexidade unitária

Para iniciar a discussão sobre complexidade unitária, é necessário conhecer um pouco mais sobre a estrutura do grupo  $SU(2)$  e a sua respectiva variedade; primeiro, nota-se que, da definição, temos

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & b_1 + ib_2 \\ -b_1 + ib_2 & a_1 - ia_2 \end{pmatrix}, (a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4 \text{ e } a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1 \right\}, \quad (3.3)$$

ou seja, esse grupo é homeomorfo a  $\mathbb{S}^3$ , a esfera de raio 1 no espaço  $\mathbb{R}^4$  (9). Além disso, a sua álgebra de Lie  $su(2)$  é formada pelas matrizes de Pauli e, por consequência, elas também formam a base do espaço tangente no ponto da variedade correspondente à identidade. De maneira mais geral, é possível dizer que o espaço tangente a qualquer ponto da variedade é gerado por matrizes hermitianas de traço nulo, tal que as matrizes  $\sigma_i$  ( $i = x, y, z$ ) também formam uma base desse espaço vetorial sobre o corpo dos reais (10). Assim, a distância  $ds$

induzida pelo produto interno entre duas unitárias  $U$  e  $U + dU$  é dada por

$$ds^2 = \text{Tr}(dU^\dagger dU) = \sum_{j,k} \text{Tr}(idUU^\dagger \sigma_j) \delta_{jk} \text{Tr}(idUU^\dagger \sigma_k). \quad (3.4)$$

Como já foi antecipado, para definir matematicamente a distância de complexidade unitária, ao invés da delta de Kronecker  $\delta_{jk}$ , introduz-se o fator de penalidade  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{I}_{jk}$  são as componentes de um tensor simétrico, uma vez que ir de um ponto  $A$  até  $B$  deve ter o mesmo custo de ir de  $B$  até  $A$ , e positivo-definido, já que a noção de distância está associada a valores não negativos (6). Dessa forma, a distância de complexidade  $ds_U$  entre as duas unitárias consideradas anteriormente aparece como

$$ds_U^2 = \sum_{j,k} \text{Tr}(idUU^\dagger \sigma_j) \mathcal{I}_{jk} \text{Tr}(idUU^\dagger \sigma_k), \quad (3.5)$$

por outro lado, é possível adicionar a hipótese de que, no caso de estudo desse trabalho,  $\mathcal{I}_{jk}$  está escrito numa base tal que sua representação é diagonal. Assim, a Eq. (3.5) assume a forma

$$ds_U^2 = \mathcal{I}_{xx} \text{Tr}(idUU^\dagger \sigma_x)^2 + \mathcal{I}_{yy} \text{Tr}(idUU^\dagger \sigma_y)^2 + \mathcal{I}_{zz} \text{Tr}(idUU^\dagger \sigma_z)^2. \quad (3.6)$$

À esta altura, torna-se interessante destacar uma intuição física para os fatores de penalidade: mostrou-se, no Capítulo 2, como as matrizes de Pauli estão diretamente ligadas a rotações em relação aos três eixos cartesianos na esfera de Bloch. De fato, os valores atribuídos a  $\mathcal{I}_{xx}$ ,  $\mathcal{I}_{yy}$  e  $\mathcal{I}_{zz}$  representam matematicamente o quanto difícil é implementar uma unitária que atua como um rotação em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Agora, inicia-se uma análise mais detalhada para o caso dos tensores  $\mathcal{I}_{ij} = \delta_{ij}$  e  $\mathcal{I}_{xx} = \mathcal{I}_{yy} = 1$ , com  $\mathcal{I}_{zz}$  arbitrário. Para isso, introduz-se um sistema de coordenadas utilizando a parametrização em termos dos ângulos de Tait-Bryan para os elementos de  $SU(2)$ , de forma que  $U$  é escrito como

$$U = e^{i\theta_z \sigma_z} e^{i\theta_y \sigma_y} e^{i\theta_x \sigma_x}. \quad (3.7)$$

Além disso, para evitar carregar fatores numéricos extra, considera-se uma normalização para o traço tal que  $\text{Tr}(\mathbb{I}) = 1$  e, por consequência,  $\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = \delta_{ij}$ .

1º)  $\mathcal{I}_{ij} = \delta_{ij}$ :

Substituindo esses fatores e a Eq. (3.7) na Eq. (3.6), chega-se em

$$ds_U^2 = d\theta_x^2 + d\theta_y^2 + d\theta_z^2 + 2 \sin(2\theta_y) d\theta_x d\theta_z, \quad (3.8)$$

que é justamente a distância entre pontos arbitrariamente próximos em uma esfera  $\mathbb{S}^3$  em coordenadas não convencionais. O resultado de forma alguma é uma surpresa: a métrica aplica a mesma penalidade em todas as direções, ou seja, ela recupera o caso da distância induzida pelo produto interno. Destaca-se ainda que, conforme esperado, a métrica exprime o caráter homogêneo e isotrópico do espaço  $\mathbb{S}^3$ .

2º)  $\mathcal{I}_{xx} = \mathcal{I}_{yy} = 1$ :

Substituindo esses novos fatores na Eq. (3.6), obtém-se

$$\begin{aligned} ds_U^2 &= \cos^2(2\theta_y)d\theta_x^2 + d\theta_y^2 + \mathcal{I}_{zz}(d\theta_z + \sin(2\theta_y)d\theta_x)^2 \\ &= (\cos^2(2\theta_y) + \mathcal{I}_{zz}\sin^2(2\theta_y))d\theta_x^2 + d\theta_y^2 + \mathcal{I}_{zz}d\theta_z^2 + 2\mathcal{I}_{zz}\sin(2\theta_y)d\theta_x d\theta_z. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Assim como no caso anterior, essas não são as coordenadas mais usuais para representar essa métrica, o que pode dificultar a identificação, entretanto ela está associada a chamada esfera de Berger – a esfera de Berger é um espaço riemanniano homogêneo difeomorfo a  $\mathbb{S}^3$ , de tal maneira que sua métrica pode ser obtida deformando a métrica usual de  $\mathbb{S}^3$  (11). Por consequência, a métrica que aparece na Eq. (3.9) continua sendo homogênea, mas não é mais isotrópica.

É interessante pontuar que é possível encontrar uma expressão analítica para a métrica de complexidade  $g_{ij}$  tal que  $ds_U^2 = g_{ij}d\theta^i d\theta^j$ , utilizando a convenção de Einstein, no caso geral em que todos os fatores de penalidade assumem valores arbitrários (6). Essa métrica é homogênea e completamente anisotrópica. Para investigar mais a fundo a geometria dos dois casos estudados, é necessário introduzir um parâmetro geométrico importante: o chamado escalar de Ricci  $\mathcal{R}$ , que atribui um valor real para cada ponto do espaço associado com a curvatura nele, com esse valor dependendo apenas da métrica e de suas derivadas na vizinhança desse ponto.

Para a 1º situação, segue da definição que  $\mathcal{R} = 6$  em todos os pontos do espaço, o que era esperado, uma vez que  $n$ -esferas tem curvatura uniforme e positiva. Isso garante também que uma dada família de geodésicas em  $\mathbb{S}^3$  tende a convergir. Por outro lado, para a 2º situação, o escalar de Ricci se torna uma função de  $\mathcal{I}_{zz}$  tal que  $\mathcal{R} = 8 - 2\mathcal{I}_{zz}$ , ou seja, a curvatura desse espaço continua sendo uniforme, mas para valores de  $\mathcal{I}_{zz} > 4$  ela não é mais positiva. Nesse caso, uma família de geodésicas tende a divergir (12).

### 3.3 Complexidade de estado

Agora a discussão será centrada no conceito de complexidade de estado. Foi mostrado, no Capítulo 2, que os estados puros de um único q-bit são topologicamente uma  $\mathbb{S}^2$  e a essa 2-esfera dá-se o nome de esfera de Bloch, de forma que há uma relação unívoca entre um estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  e um vetor unitário  $\vec{\psi} \in \mathbb{R}^3$ . Essa relação pode ser descrita pelo mapa

$$\vec{\psi} = \langle \psi | \vec{\sigma} | \psi \rangle, \quad (3.10)$$

lembrando que  $\vec{\sigma} = \sigma_x \hat{i} + \sigma_y \hat{j} + \sigma_z \hat{k}$ . Dessa maneira, é possível definir a relação entre o produto interno nesses dois espaços como sendo

$$|\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle|^2 = \frac{1 + \vec{\psi}_1 \cdot \vec{\psi}_2}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (3.11)$$

em que  $\alpha$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{\psi}_1$  e  $\vec{\psi}_2$ . Essa convenção é utilizada para que estados ortogonais,  $\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = 0$ , estejam associados aos pontos antipodais da esfera de Bloch,  $\alpha = \pi$ .

Com efeito, para encontrar a métrica associada a complexidade de estado, é necessário encontrar a distância  $ds$  entre dois estados  $|\psi\rangle$  e  $|\psi + d\psi\rangle$  arbitrariamente próximos e inserir os fatores de penalidade correspondentes. Seja  $\vec{\psi} + d\vec{\psi}$  o vetor associado a  $|\psi + d\psi\rangle$ , nota-se que a condição dada na Eq. (3.11) atribui uma relação entre  $\vec{\psi}$  e  $d\vec{\psi}$  para que o estado considerado seja normalizado. Tomando a aproximação em primeira ordem de  $d\vec{\psi}$

$$|\langle \psi + d\psi | \psi + d\psi \rangle|^2 = 1 + \vec{\psi} \cdot d\vec{\psi} \implies \vec{\psi} \cdot d\vec{\psi} = 0. \quad (3.12)$$

Por conseguinte, assume-se que o estado  $|\psi + d\psi\rangle$  pode ser obtido de  $|\psi\rangle$  a partir de uma rotação infinitesimal em torno de um eixo  $\vec{r}$ . No entanto, pela definição de rotações, é necessário ter  $\vec{r} \cdot d\vec{\psi} = 0$ , que é satisfeita por uma família de vetores unitários  $\vec{r}$  que estão contidos no plano perpendicular a  $d\vec{\psi}$ . Logo

$$\vec{r} = \frac{d\vec{\psi} \times \vec{\psi} + \beta \vec{\psi}}{|d\vec{\psi} \times \vec{\psi} + \beta \vec{\psi}|}, \quad (3.13)$$

em que  $\beta \in \mathbb{R}$  é um parâmetro cuja determinação está relacionado com a escolha do eixo de rotação que minimiza o ângulo percorrido para ir de  $\vec{\psi}$  a  $\vec{\psi} + d\vec{\psi}$ . Pontua-se a associação direta entre essa descrição e a de escolher o elemento  $U$ , do subconjunto de todas as transformações unitárias que satisfazem  $|\psi + d\psi\rangle = U |\psi\rangle$ , que possui a menor complexidade unitária, feita anteriormente. Por outro lado, adaptando a Eq. (2.8), é

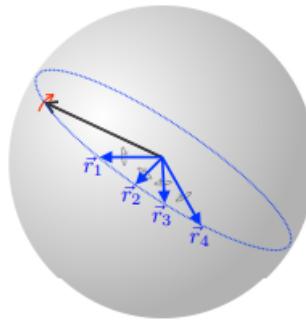


Figura 2 – Exemplos de vetores unitários que satisfazem a Eq. (3.13).

Fonte: BROWN; SUSSKIND. (6)

possível descrever essa rotação em termos de uma série de Taylor que, diferenciando e tomando apenas a primeira ordem em  $d\vec{\psi}$ , é escrita como  $dU = \frac{1}{2}i(d\vec{\psi} \times \vec{\psi} + \beta \vec{\psi}) \cdot \vec{\sigma}$ . Desconsiderando, em primeira análise, os fatores de penalidade, a Eq. (3.4) dá que

$$ds^2 = \frac{(d\vec{\psi} \times \vec{\psi} + \beta \vec{\psi}) \cdot (d\vec{\psi} \times \vec{\psi} + \beta \vec{\psi})}{4} = \frac{d\vec{\psi} \cdot d\vec{\psi} + \beta^2}{4}, \quad (3.14)$$

de forma que é direta a conclusão de que  $\beta = 0$  minimiza a Eq. (3.14), resultando na métrica usual em  $\mathbb{S}^2$  com um fator 4 adicional:  $4ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ . Isso implica no

fato de que, nesse caso, o vetor  $\vec{r}$  o qual está associado ao menor ângulo de rotação possível é aquele que é perpendicular tanto a  $d\vec{\psi}$  quanto a  $\vec{\psi}$ , ou seja

$$d\alpha^2 = \frac{d\vec{\psi} \cdot d\vec{\psi}}{|\vec{\psi} \times \vec{r}|^2} \implies d\alpha_{min}^2 = d\vec{\psi} \cdot d\vec{\psi}. \quad (3.15)$$

Agora, considera-se um fator de penalidade representado pelo tensor  $\mathcal{I}_{ij} = \delta_{ij} + (\mathcal{I}_{zz} - 1)p_i p_j$ . Fisicamente esse fator penaliza apenas rotações em relação a um eixo arbitrário  $\vec{p}$  unitário. Nesse sentido, define-se um produto interno  $\vec{a} * \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + (\mathcal{I}_{zz} - 1)(\vec{a} \cdot \vec{p})(\vec{b} \cdot \vec{p})$  em  $\mathbb{R}^3$  e que leva em consideração a penalização. Tomando por base a Eq. (3.14), a distância de complexidade de estado  $ds_E$  é escrita como

$$\begin{aligned} 4ds_E^2 &= (d\vec{\psi} \times \vec{\psi} + \beta\vec{\psi}) * (d\vec{\psi} \times \vec{\psi} + \beta\vec{\psi}) \\ &= (d\vec{\psi} \times \vec{\psi}) * (d\vec{\psi} \times \vec{\psi}) - \frac{[\vec{\psi} * (d\vec{\psi} \times \vec{\psi})]^2}{\vec{\psi} * \vec{\psi}} + (\vec{\psi} * \vec{\psi}) \left[ \beta + \frac{\vec{\psi} * (d\vec{\psi} \times \vec{\psi})}{\vec{\psi} * \vec{\psi}} \right]^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Note que, escolhendo o valor de  $\beta$  que minimiza a equação acima, o último termo dessa expressão vai a zero. Usando um sistema de coordenadas polares  $\{\theta, \phi\}$  tal que  $\vec{p}$  está alinhado com o pólo norte de  $\mathbb{S}^2$  e, consequentemente,  $\mathcal{I}_{xx} = \mathcal{I}_{yy} = 1$ , a Eq. (3.16) é reescrita como

$$\begin{aligned} 4ds_E^2 &= d\vec{\psi} \cdot d\vec{\psi} + \frac{(\mathcal{I}_{zz} - 1)[d\vec{\psi} \cdot (\vec{\psi} \times \vec{p})]^2}{(\mathcal{I}_{zz} - 1)(\vec{\psi} \cdot \vec{p})^2 + 1} \\ &= d\theta^2 + \frac{\mathcal{I}_{zz} \sin^2(\theta)}{\mathcal{I}_{zz} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} d\phi^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

e é direta a verificação de que  $\mathcal{I}_{zz} = 1$  faz que  $ds_E = ds$ . Analogamente ao que foi exposto no caso da complexidade unitária, é possível encontrar uma expressão analítica para a métrica de complexidade de estado no caso geral em que fatores de penalidade assumem valores arbitrários (6). Como métricas também podem ser escritas na representação matricial, pontua-se que, no primeiro caso, ela é representada por uma matriz  $3 \times 3$ , enquanto no segundo ela é representada por uma  $2 \times 2$ .

Ademais, a relação entre a distância de complexidade  $ds_E$  e o ângulo de rotação  $d\alpha$  correspondente pode ser obtida utilizando a noção de produto interno penalizado e se apresenta como

$$4ds_E^2 = (1 + (\mathcal{I}_{zz} - 1)(\vec{p} \cdot \vec{r})^2)d\alpha^2. \quad (3.18)$$

Observa-se que a distância de complexidade passa a ser uma função tanto do fator  $\mathcal{I}_{zz}$  quanto do ângulo entre  $\vec{p}$  e  $\vec{r}$ . Substituindo a Eq. (3.15) nessa expressão, tem-se

$$4ds_E^2 = \frac{1 + (\mathcal{I}_{zz} - 1)(\vec{p} \cdot \vec{r})^2}{|\vec{\psi} \times \vec{r}|^2} d\vec{\psi} \cdot d\vec{\psi}. \quad (3.19)$$

A Eq. (3.19) torna clara a interpretação do eixo  $\vec{r}$  que minimiza a distância de complexidade

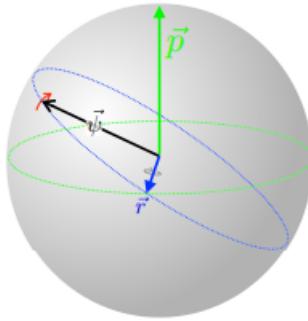


Figura 3 – Exemplo de  $\vec{r}$  ideal para os vetores  $\vec{p}$  e  $\vec{\psi}$  mostrados.

Fonte: BROWN; SUSSKIND. (6)

de estado para o caso de estudo: É necessário que a escolha reduza tanto o ângulo de rotação  $d\alpha$ , isso é feito fazendo o produto escalar  $(\vec{\psi} \cdot \vec{r})$  ser o mais próximo possível de 0, quanto a penalização na direção do eixo de rotação adotado, isso é feito fazendo o produto escalar  $(\vec{p} \cdot \vec{r})$  ser o mais próximo possível de 0. Note que já era possível obter o vetor  $\vec{r}$  ideal desde a Eq. (3.16), que acaba resultando em  $\beta = -\frac{(\mathcal{I}_{zz} - 1)[\vec{p} \cdot (d\vec{\psi} \times \vec{\psi})](\vec{p} \cdot \vec{\psi})}{1 + (\mathcal{I}_{zz} - 1)(\vec{p} \cdot \vec{\psi})^2}$ , porém o tratamento posterior é fundamental para compreender o significado geométrico desse resultado.

É interessante observar como o vetor ideal  $\vec{r}$  se comporta conforme varia-se o valor do fator de penalização  $\mathcal{I}_{zz}$ . No caso em que  $\mathcal{I}_{zz} = 1$ , recupera-se o caso sem penalização e tem-se  $\vec{\psi} \cdot \vec{r} = 0$ , enquanto no caso em que  $\mathcal{I}_{zz} \rightarrow \infty$ , a Eq. (3.19) mostra que é necessário ter  $\vec{p} \cdot \vec{r} = 0$ . Para valores intermediários de  $\mathcal{I}_{zz}$ , espera-se que  $\vec{r}$  esteja contido na região entre os dois planos exibidos na Fig. 3.

Por fim, calcula-se o escalar de Ricci para a métrica descrita na Eq. (3.17)

$$\mathcal{R} = \frac{8\mathcal{I}_{zz}[1 - 2(\mathcal{I}_{zz} - 1)\cos^2(\theta)]}{(\mathcal{I}_{zz}\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))^2}. \quad (3.20)$$

Para  $\mathcal{I}_{zz} < \frac{3}{2}$ , a curvatura é positiva em todo o espaço de Hilbert considerado. Mais do que isso, é possível analisar o efeito da penalização sob a ótica de deformação da esfera de Bloch, no sentido de que, para  $\mathcal{I}_{zz} < 1$ , ela se torna prolata, enquanto para  $1 < \mathcal{I}_{zz} < \frac{3}{2}$  ela se torna oblata. Já para  $\mathcal{I}_{zz} > \frac{3}{2}$ , a curvatura passa a ser negativa nos pólos, cai até um valor mínimo e depois volta a crescer nas proximidades do equador, chegando a um valor máximo de  $\mathcal{R} = 8\mathcal{I}_{zz}$  em  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Topologicamente,  $\mathcal{H}$  passa a ser visto como dois discos negativamente curvados, o que dificulta a representação gráfica em  $\mathbb{R}^3$ , conectados por uma região de curvatura positiva no centro.

Analizando ainda o caso em que  $\mathcal{I}_{zz} \rightarrow \infty$ , conclui-se que, da Eq. (3.20),  $\mathcal{R} = -\frac{16}{\cos^2(\theta)}$ , exceto para regiões próximas de  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , onde  $\mathcal{R}$  colapsa na função delta positiva. É interessante pontuar também que, embora haja muitas semelhanças no comportamento

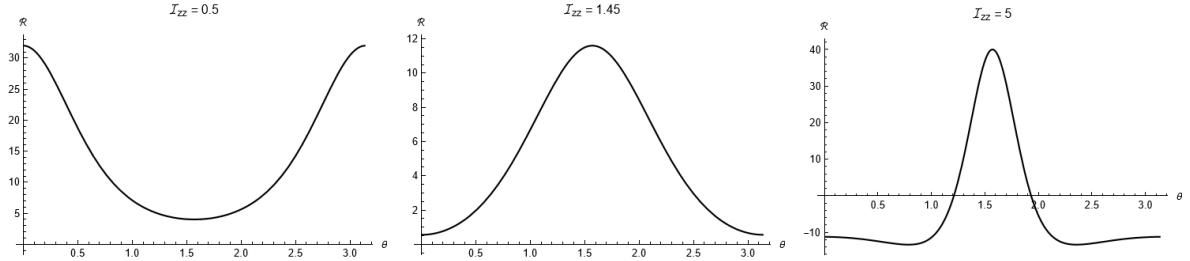


Figura 4 –  $\mathcal{R}(\theta)$  para os esferoides prolato, oblato e a região com curvatura negativa.  
Fonte: Elaborada pelo autor.

das complexidades tanto unitária quanto de estado, no caso da métrica na Eq. (3.9), a curvatura correspondente é uniforme e diverge em todo espaço no limite em que  $\mathcal{I}_{zz} \rightarrow \infty$ , enquanto na métrica exibida na Eq. (3.16) a curvatura deixa de ser constante e diverge apenas na região equatorial nesse mesmo limite.

### 3.4 Sistemas de múltiplos q-bits

É possível generalizar boa parte das ideias expostas nas seções anteriores, sobretudo as que são relacionadas à geometria de complexidade unitária, para sistemas compostos por  $N > 1$  q-bits. Nesse sentido, a variedade diferenciável considerada passa a ser a associada ao  $SU(2^N)$ , de forma que uma base completa para seu espaço tangente é dada pelas  $4^N - 1$  matrizes de Pauli generalizadas, tal como  $\sigma_J = \sigma_{1,x} \otimes \mathbb{I}_2 \otimes \dots \otimes \sigma_{N,z}$ , onde cada termo desse produto tensorial é dado por uma matriz de Pauli  $\sigma_i$  ( $i = x, y, z$ ) ou pela identidade  $\mathbb{I}$ , excluindo-se o elemento  $\mathbb{I}_1 \otimes \mathbb{I}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{I}_N$ . Por conseguinte, as relações (3.4) e (3.5) permanecem válidas, desde que sejam feitas as substituições  $\sigma_i \rightarrow \sigma_I$  e  $\mathcal{I}_{ij} \rightarrow \mathcal{I}_{IJ}$ . Destaca-se que o fator de penalidade  $\mathcal{I}_{IJ}$  continua representando matematicamente o quanto difícil é seguir por uma dada direção no espaço tangente, mas agora direções difíceis passam a estar associadas a elementos da base  $\sigma_I$  que tocam muitos q-bits, ou seja, quanto mais termos de um q-bit diferentes da identidade  $\sigma_I$  possuir, maior será o valor de  $\mathcal{I}_{II}$ .

Em geral, o caso de  $N$  q-bits é melhor abordado como um problema de controle geométrico, como é feito nas Refs. (7) e (10), em que a tarefa de encontrar o menor caminho entre  $\mathbb{I}$  e uma unitária de interesse  $U$ , segundo uma métrica de complexidade definida a partir de um tensor  $\mathcal{I}_{IJ}$ , é análoga a de encontrar uma hamiltoniana  $H(t)$ , que pode ser expandida em termos das matrizes de Pauli generalizadas, dependente do tempo, que gera  $U$  em um determinado tempo  $T$  segundo a equação de Schrödinger

$$\frac{dU}{dt} = -iH(t)U(t), \quad U(0) = \mathbb{I}, \quad U(T) = U, \quad (3.21)$$

fazendo  $\hbar = 1$  e tal que  $H(t)$  minimiza o funcional custo total  $d([U]) = \int_0^T dt F[H(t)]$  dada uma função custo  $F[H]$ . Note que, nessa abordagem, a função custo define a geometria no espaço  $SU(2^N)$ , e ela pode ser tomada tal que aplica custo 1 nas componentes de  $H(t)$  que são 2-local – uma componente é dita  $k$ -local se ela está associada a um elemento de base

$\sigma_I$  no qual há, no máximo,  $k$  termos de um q-bit  $\sigma_i$  no produto tensorial que o compõe – e aplica um custo  $p$  nas demais componentes.

Esse custo  $p$  é arbitrário, mas é interessante que ele cresça exponencialmente com  $N$ , uma vez que isso reflete que a complexidade unitária para esses sistemas pode ser exponencialmente grande. Essa é uma característica exclusiva da geometria de complexidade de  $N$  q-bits (mesmo no regime em que  $\mathcal{I}_{zz} \rightarrow \infty$ , a complexidade em sistemas de um único q-bit permanece limitada) e está relacionada ao fato de que a maior parte das direções do espaço tangente são fáceis de serem percorridas no caso de um q-bit, mas especificamente 2 de 3 direções, já que  $\mathcal{I}_{xx} = \mathcal{I}_{yy} = 1$ , enquanto no caso de múltiplos q-bits há muito menos direções fáceis do que difíceis.

Por outro lado, sistemas de um q-bit com a métrica associada à esfera de Berger ainda refletem algumas características da complexidade de  $N$  q-bits, como o fato de que, em ambos os casos, o volume de uma dada região e a distância média entre dois pontos no espaço de unitárias correspondente crescem conforme os fatores de penalidade também crescem; no geral, afirma-se que sistemas com um único q-bit são ineficazes para identificar como certas propriedades escalam com o tamanho do sistema. Para o caso de múltiplos q-bits, a possibilidade de distinguir grandezas que crescem polinomialmente das que crescem exponencialmente permite compreender um padrão de complexidade que é análogo à evolução da entropia de um sistema clássico com  $2^N$  graus de liberdade (13).

Por fim, toma-se a seguinte situação: considere o conjunto de todas as unitárias de  $SU(2^N)$  com complexidade inferior a um certo valor. Para valores baixos o suficiente, a topologia desse conjunto é dada por uma esfera deformada, no sentido de que as direções fáceis são alongadas enquanto as difíceis são encurtadas. Entretanto, conforme o valor de complexidade máxima que define o conjunto cresce, essa região se torna muito mais intrincada, com estruturas  $(4^N - 1)$ -dimensionais similares a ramos se enrolando em torno principalmente das direções fáceis.

## 4 CONCLUSÃO

O objetivo desse trabalho foi apresentar características gerais acerca da geometria de q-bits, iniciando da definição tradicional desses sistemas quânticos de dois níveis e chegando até uma proposta alternativa para a análise de complexidade computacional quântica, algo que é fundamental para o desenvolvimento de novos algoritmos e para avaliar a eficiência de algoritmos já estabelecidos em diferentes cenários.

Primeiramente, definidas as noções básicas de vetores de estado, operador densidade e transformações unitárias, mostrou-se como esses conceitos se relacionam sob um ponto de vista geométrico, chegando à chamada esfera de Bloch. Foi possível visualizar como pontos da superfície dessa esfera estão univocamente associados a estados puros de único q-bit e o formalismo de operador densidade permite relacionar também os pontos internos dessa esfera com os estados mistos. Além disso, pontuou-se como transformações unitárias podem ser vistas como rotações na esfera de Bloch, construção fundamental no estudo de complexidade desenvolvido no restante do trabalho.

Assim, introduziu-se esse estudo exibindo o modelo mais conhecido para a análise de complexidade, utilizando a noção de conjunto universal de portas. Listou-se, então, alguns problemas intrínsecos a essa definição e, desejando-se encontrar uma proposta alternativa, é apresentado o modelo de geometria de complexidade. Nele, a contagem discreta de portas quânticas dá lugar à distância percorrida ao longo de uma geodésica no espaço  $SU(2)$ , para o caso de um q-bit. É discutido tanto o conceito de complexidade unitária quanto o de complexidade de estado, evidenciando uma relação direta entre eles. Ademais, investigou-se mais a fundo o comportamento da geometria de alguns casos especiais, como o caso em que  $\mathcal{I}_{zz} \gg \mathcal{I}_{xx} = \mathcal{I}_{yy}$ , uma vez que é possível compará-lo com o comportamento esperado para sistemas de múltiplos q-bits.

Nesse sentido, mostrou-se ainda as principais características da geometria de complexidade de sistemas de  $N$  q-bits que a sua análoga para um único q-bit permite observar e quais ela falha em apresentar, pontuando-se alguns exemplos mais concretos. A geometria de complexidade, apesar de estar intrinsecamente relacionada à informação quântica, tem potencial para ser um conceito mais fundamental: Na Ref. (6), os autores citam a aparente relação entre ela e a conjectura de complexidade holográfica, na correspondência AdS/CFT, e a possibilidade de utilizar esse conceito no estudo de termodinâmica estatística, implicando que ela pode vir a ser uma proposta de grande interesse para a física teórica como um todo.



## REFERÊNCIAS

- 1 NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. **Quantum information and quantum computation.** Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- 2 KAYE, P. R.; LAFLAMME, R.; MOSCA, M. **An introduction to quantum computing.** Oxford: Oxford University Press, 2007.
- 3 OZOLS, M. A. **Geometry of a qubit.** 2007. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:53049410>. Acesso em: 26 out. 2023.
- 4 BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. **Complex variables and applications.** New York: McGraw-Hill, 2009.
- 5 SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics.** New York: Addison-Wesley, 1994.
- 6 BROWN, A.; SUSSKIND, L. Complexity geometry of a single qubit. **Physical Review D**, v. 100, n. 4, p. 046020, 2019.
- 7 NIELSEN, M. *et al.* Quantum computation as geometry. **Science**, v. 311, p. 1133–1135, 2006.
- 8 ISHAM, C. J. **Modern differential geometry for physicists.** Singapura: World Scientific, 1999.
- 9 BARATA, J. C. A. **Grupos:** Alguns exemplos. Disponível em: [https://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas\\_de\\_aula/arquivos/nc-cap21.pdf](https://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/arquivos/nc-cap21.pdf). Acesso em: 26 out. 2023.
- 10 GU, M.; DOHERTY, A.; NIELSEN, M. Quantum control via geometry: an explicit example. **Physical Review A**, v. 78, n. 3, p. 032327, 2008.
- 11 GADEA, P. M.; OUBIÑA, J. A. Homogeneous riemannian structures on berger 3-spheres. **Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society**, v. 48, n. 2, p. 375–387, 2005.
- 12 LEE, J. M. **Riemannian manifolds: an introduction to curvature.** Berlin: Springer-Verlag, 1997. (Graduate texts in mathematics, v.167).
- 13 BROWN, A.; SUSSKIND, L. The second law of quantum complexity. **Physical Review D**, v. 97, n. 8, p. 086015, 2017.